

*П.М. Гащук, д-р техн. наук, професор  
(Львівський державний університет безпеки життєдіяльності),  
С.В. Нікіпчук  
(Національний університет «Львівська політехніка»)*

## АЛГОРИТМ СТРУКТУРУВАННЯ ТРАНСМІСІЙ МОБІЛЬНИХ МАШИН У СЕРЕДОВИЩІ АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

Запропоновано тлумачити механічну трансмісію мобільної машини як систему багатоланкових диференціалів зі змінюваною структурою. Високий рівень формалізму і загальності забезпечує опис дії механізму у формі рівнянь Лагранжа другого роду. На початковій стадії моделювання всі змінні, що визначають динамічний та кінематичний стан механізму, трактуються як цілком незалежні. Наведення зв'язків між змінними — це власне і є одна із стадій конструювання. Та ці зв'язки доцільно наводити вмотивовано — у процесі узагальненої оптимізації трансмісії в середовищі автоматизованого проектування. В такому разі параметрична оптимізація буде водночас і структурним синтезом трансмісії.

**Ключові слова:** мобільна машина, трансмісія, багатоланковий диференціал, структурна формалізація, структурний синтез

*P.M. Hashchuk, S.V. Nikipchuk*

## THE ALGORITHM FOR MODELLING VEHICLE TRANSMISSION STRUCTURES IN THE COMPUTER-AIDED DESIGN ENVIRONMENT

It is recommended to consider a mechanical transmission of the vehicle as a system of multi-element differentials with the changeable structure. The mechanism behaviour is described using the highest level of formalism and generality in the form of Lagrange equations of the second type. At the initial stage of modelling all the variables that determine the dynamic and kinematic state of the mechanism are treated as entirely independent. The determination of the relationships between variables covers one of the modelling stages. The mentioned relationships should be provided in the process of generalized optimization of the transmission by means of the computer-aided modelling. In this case, the parameter optimization covers the structural synthesis of the transmission.

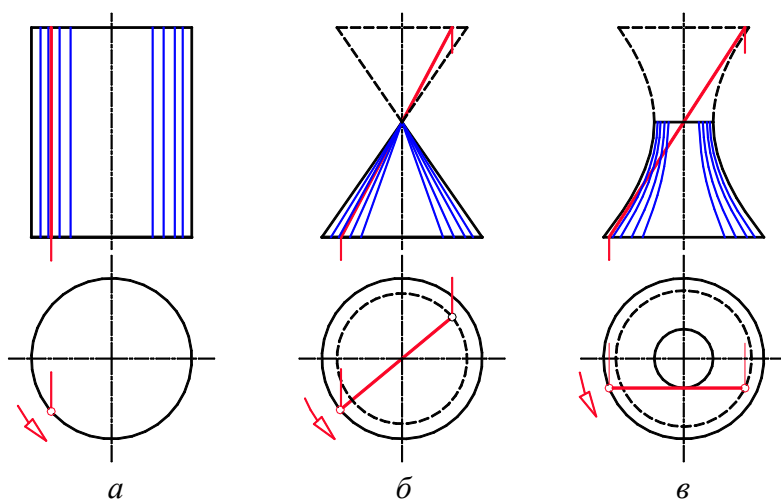
**Key words:** vehicle, transmission, multi-element differential, structural formalization, structural synthesis.

**Мотивація.** Принципово детерміністичний світогляд пересічно веде до переконання в тому, що чим складніша модель — тим вона точніша (з огляду як на якість формалізованого відтворення реальної системи, так і на якість втілення бажаних властивостей при формальному синтезі системи). А все тому, що складним є світ. Або навпаки: аби бути точною модель мусить бути складною. Разом з тим, досвід настійно доводить існування синергетичності як в процесах створення механічних систем, так і процесах взаємодії цих систем з довкіллям. Дотримання ж принципу синергетичності веде до визнання того, що завжди існує якась єдина модель оптимальної складності — і тоді, коли йдеться про синтез нової малої реальної системи (наприклад, моделі, якщо нею вільно оперувати не вдасться, якщо з неї важко користати?)

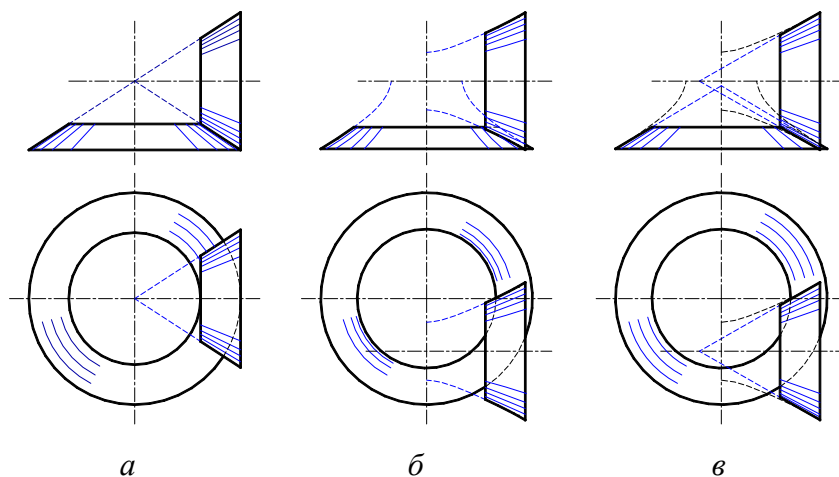
Аналіз структур трансмісій мобільних машин інколи вибудовується на розлого описових ідентифікаторах. А надавати таким погано визначуваним-означуваним за своєю суттю описам якусь особливу точність марно, і, який би не був привід, застосування точних формул до цих надто вільних описів є не що інше, як обман і марна трата часу. Разом з тим, існують засоби глибокої формалізації відображення структур механічних передач [1...5]. І в певній мірі це стосується й механічних трансмісій мобільних машин [6...10]. Надзвичайно конструктивним можна вважати, приміром, поняття механічного ланцюга [11]. Прикладом глибокої формалізації зубчастих (планетарних) механізмів можна також вважати підхід, що заснова-

ний на теорії графів [12]. Тож виникає бажання, спираючись на досягнутий доволі високий рівень формалізації, розробити алгоритм структурування і впровадження в середовище автоматизованого проектування дуже загально формалізовану модель трансмісії мобільної машини — таку, щоб унаслідок оптимізаційних маніпуляцій в цьому середовищі вона мусила б трансформуватись у модель конкретної трансмісії, якнайкраще припасованої до мобільної машини конкретного призначення. Саме в цьому полягає *мета дослідження*.

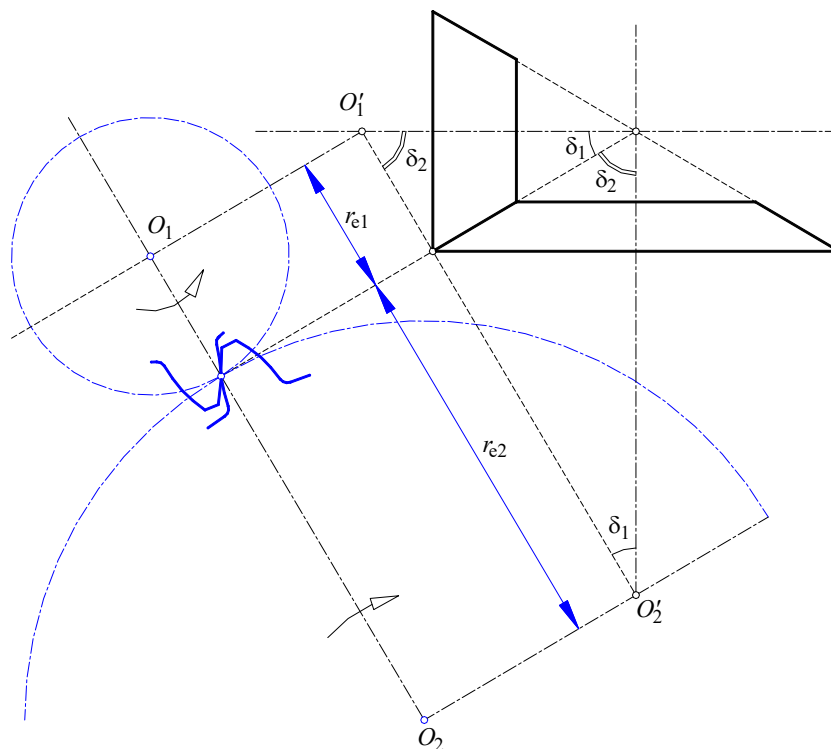
**Посеред хаосу можливостей.** Визнанням засобом створення механічних трансмісій є зубчасті передатні механізми найрізноманітнішої будови [13–15]. Але найпростішими серед них є такі, що «зазублюються» циліндрами, конусами, гіперболоїдами (рис. 1). Перелічені тіла мають лінійні твірні, утворюються обертанням прямої навколо осі зі збереженням віддалі до неї. Конусне зачеплення можна тлумачити як окремий випадок гіперболоїдного, але гіперболоїдне зачеплення можна також трансформувати у так зване гіпоїдне (гіперболоїдне, в якому початкові та подільні поверхні є конічними), рис. 2. Конусній передачі можна поставити у відповідність еквівалентну циліндричну (рис. 3):  $r_e$  — радіуси еквівалентних твірних кіл,  $\delta$  — параметри конічної передачі.



**Рисунок 1** — Твірні елементи типових механічних передач — циліндр (а), конус (б), гіперболоїд (в)



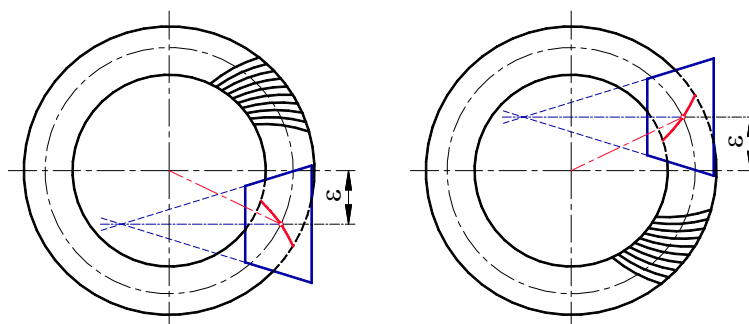
**Рисунок 2** — Елементарні «конусні» механічні передачі: проста конусна (а), гіперболоїдна (б), гіпоїдна — гіперболоїдна вироджена (в)



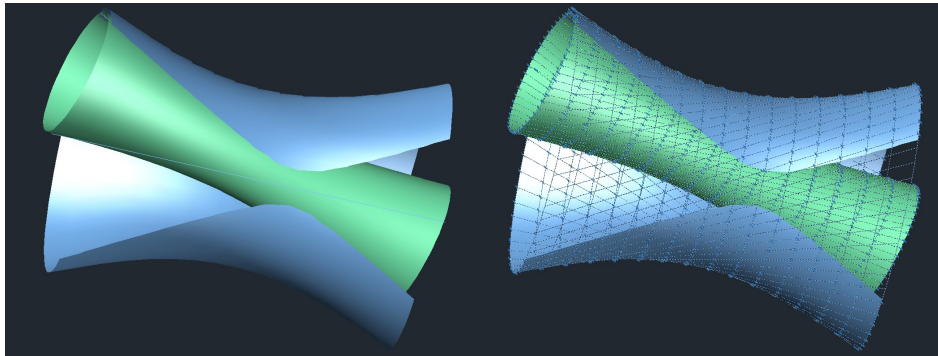
**Рисунок 3** — Схема, що відображає умови еквівалентності простих конусної і циліндричної механічних передач

Є ознаки того, що гіперboloїдну передачу можна трактувати як загальну, від якої походять інші. Приміром, спіроїдна передача (рис. 4) — це саме гіперboloїдна передача (другого роду), у коліс якої початкові поверхні — конічні, а от зубці шестерні-черв'яка — гвинтові. Міжвісна віддаль  $\varepsilon$  у неї значно більша, ніж у гіпоїдної. Звісно, низький ККД (особливо у разі великих передатних відношень) не дозволяє розглядати спіроїдну передачу як широку альтернативу іншим. Ще легше побачити окремішність (частковість) конічної звичайної та циліндричної передачі відносно гіперboloїдної. Про те, що конічній можна протиставити циліндричну, вже йшлося на рис. 3.

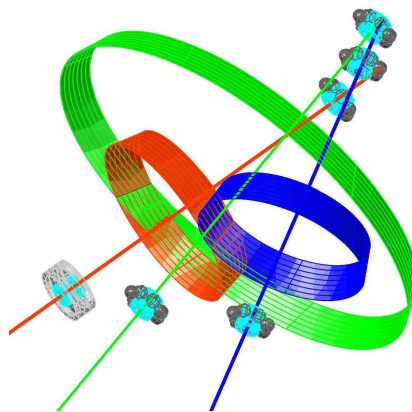
Можна уявити собі ще й, так би мовити, «внутрішню» взаємодію гіперboloїдів, рис. 5. Відтак можна дійти до гіперboloїдного планетарного зачеплення, рис. 6 [16]. Одне й те саме передатне відношення втілюватимуть різні за розмірами передачі, рис. 7.



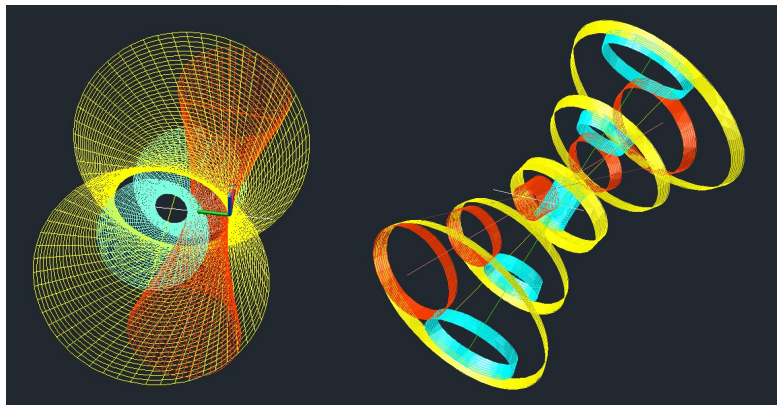
**Рисунок 4** — Схеми спіроїдних механічних передач (з нижнім і верхнім черв'яками)



**Рисунок 5** — Гіперболоїдні внутрішні зчеплення (ліворуч) та зачеплення (праворуч); частину зовнішнього гіперболоїда відрізано площиною



**Рисунок 6** — Схема гіперболоїдного планетарного зачеплення



**Рисунок 7** — Множина планетарних гіперболоїдних зачеплень різних розмірів та однаковим передатним відношенням

З усього досі викладеного випливає, що в процесі розпізнавання засобів перетворення обертового руху існує надійний (дедуктивний) шлях від загального до окремого (від загального до часткового). Тому нема особливої потреби розрізняти від самого початку аналізу-синтезу механічних передач різновиди зубчастих зачеплень. Гіперболоїдна форма є лінійчасотою, див. рис. 5 (схема праворуч), і твірна пряма може правити за уявний робочий зубець. Подібний шлях «від загального до окремого, особливого» слід вибудувати і стосовно всієї трансмісії.

**Загальна процедура укладання рівнянь руху механічної передачі.** Хай рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

описують рух деякого механізму ( $T$  — кінетична енергія, що накопичується в механізмі до миті часу  $t$ ;  $q_i$  — узагальнена координата;  $Q_i$  — узагальнена зовнішня сила;  $n$  — кількість ступенів вільності механізму). На основі цього механізму сконструюймо новий, формуючи в старому  $m$  нових ідеальних в'язей

$$\sum_{i=1}^n f_{ji}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i + f_j(q_1, \dots, q_n, t) = 0, \quad j = \overline{1, d};$$

$$g_j(q_1, \dots, q_n, t) = 0, \quad j = \overline{d+1, m}. \quad (3)$$

Отож новій механічній передачі доведеться поставити у відповідність рівняння (2), в правих частинах яких окрім сил  $Q_i$  повинні фігурувати ще й сили  $Q'_i$ , зумовлені реакціями нових (додаткових) в'язей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + Q'_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Робота сил реакцій в ідеальних в'язях на віртуальних переміщеннях — нульова:

$$\sum_{i=1}^n Q'_i \delta q_i = 0, \quad (5)$$

де  $\delta q_i$  — мала віртуальна зміна узагальненої координати  $q_i$ .

З рівнянь в'язей (3) випливає, що

$$\sum_{i=1}^n f_{ji} \delta q_i = 0, \quad j = \overline{1, d}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0, \quad j = \overline{d+1, m}.$$

Помножмо кожну з цих рівностей на свій множник  $v_j$  (фіктивну змінну), додаймо отримані вирази, а результат віднімемо від виразу (5). Матимемо співвідношення

$$\sum_{i=1}^n \delta q_i \left( Q'_i - \sum_{j=1}^n v_j f_{ji} \right) = 0. \quad (6)$$

Тут позначено

$$\frac{\partial g_j}{\partial q_i} = f_{ji} \quad (j = \overline{d+1, m}).$$

Вважатимемо, що координати  $q_1, q_2, \dots, q_{n-m}$  є незалежними. Підбираючи значення величин  $v_1, v_2, \dots, v_m$  так, щоби множники при варіаціях  $\delta q_{n-m+1}, \dots, \delta q_n$  в виразі (6) виявилися рівними нулю, та враховуючи незалежність перших  $n-m$  варіацій, дійдемо висновку, що рівність (5) справджуватиметься тільки тоді, коли

$$Q'_i = \sum_{j=1}^m v_j f_{ji}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отож вираз (4) набуде вигляду

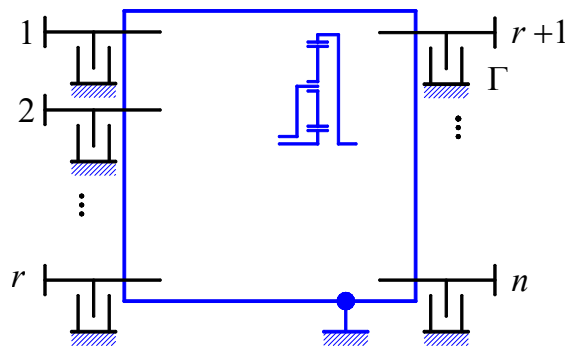
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^m v_j f_{ji} = Q_i + \sum_{j=1}^d v_j f_{ji} + \sum_{j=d+1}^m v_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i}. \quad (7)$$

Описаний алгоритм пересічно використовують за необхідності врахувати додаткові в'язі (голономні та неголономні), котрі раніш в рівняннях руху не брались до уваги [17]. Але цього разу переслідуються мета спростити процедуру укладання рівнянь руху механічної передачі. Суть алгоритму — відмовитись від поділу змінних, що відображають рух складних механізмів, на залежні й незалежні.

**Узагальнений механічний диференціал.** Різноманіття доводиться будувати з певного одноманіття — якихось «цеглин-примітивів». Це ще один з кроків до наведення ладу в хаосі можливостей. За приклад можуть правити уніфікаційні засади формування типажів мобільної техніки [18...21], коли з певним чином улаштованих модулів можна синтезувати скільки потрібно типорозмірів машин.

Подібно, з низки триланкових диференціалів (планетарних зубчастих механізмів), що, як відомо, мають по два ступені вільності, можна побудувати [12] будь-який багатоланковий диференціал з багатьма ступенями вільності. Щоб отримати, скажімо, диференціал з  $\xi$  ступенями вільності потрібно цілісно поєднати  $v$  триланкових диференціалів  $x$  в'язями так, щоб справдилась бажана рівність  $\xi = 2v - x$ . Отже можна вважати, що у розпорядженні конструктора трансмісії завжди є так званий узагальнений механічний диференціал, внутрішня будова якого тут значення не має. Загалом можна вважати, що він побудований з гіперболоїдних планетарних зачеплень, які за потреби можна звести до будь-якого звичного різновиду зачеплення.

Тож звернімося до  $n$ -ланкового узагальненого механічного диференціала. Пронумеруємо всі його зовнішні ланки наскрізно (без розрізнення їх функцій) та умовно прилаштуємо до них гальма  $\Gamma$  (рис. 8). В такому разі усі зовнішні ланки диференціала, загальна кількість яких —  $n$ , стануть абстрактно ідентичними.



**Рисунок 8** — Схема узагальненого механічного диференціала

Припустімо, що руйнуванням в'язей  $n$ -ланковий диференціал перетворено в механізм з  $n$  ступенями вільності (при цьому він, звісно, губить свої корисні властивості). Дія такого механізму описується рівняннями Лагранжа другого роду (2) чи (4), які цього разу мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = M_i + M_{ti} - M_{tri}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

де  $\varphi_i$  — кут обертання  $i$ -ї ланки диференціала;  $M_i$  та  $M_{ti}$  — момент, що навантажує ланки ззовні, та момент тертя, створюваного гальмом;  $M_{tri}$  — зведений до  $i$ -ї ланки момент сил внутрішнього (дисипативного) тертя.

Але ж насправді диференціал має  $W < n$  ступенів вільності. Рівняння кінематичних зв'язей в диференціалі — лінійні:

$$F_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \omega_i = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Величини  $a_{ji}$  є сталими, якщо вважати, що жодні передатні відношення в диференціалі не піддаються регулюванню. Таким чином, зважаючи на (8), рівняння (7) можна подати у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_i} - \frac{\partial T}{\partial \phi_i} = M_i + M_{\text{в}} - M_{\text{тв}} + \sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial F_j}{\partial \omega_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Тут враховано, що  $a_{ij} = \frac{\partial F_j}{\partial \omega_i}$ .

Зважмо, рівняння (10) можна отримати також, застосовуючи так званий варіаційний принцип Гамільтона — Остроградського, якому перевага тут не надається через те, що він анітрохи не спрощує проведених тут математичними засобами міркувань.

Система (9) відрізняється від системи

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

тільки меншою на  $W = n - m$  кількістю лінійних співвідношень між змінними  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Очевидно, що коли визначник матриці

$$[a_{ji}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (12)$$

є нулем ( $\det[a_{ji}] = 0$ ), то система (11) має тільки нульовий розв'язок  $\omega_1 = \dots = \omega_n = 0$  (це означає відсутність ступенів вільності в диференціалі). Але оскільки диференціал має  $W > 0$  ступенів вільності, то ранг матриці (12) завжди менший за кількість змінних в (11) ( $\text{rank}[a_{ji}] < n$ ). Тому за теоремами Кронекера-Капеллі [22] система (11) має незліченну множину розв'язків.

Ранг матриці (12) відображає кількість ступенів вільності в диференціалі, і при  $W > 0$  деякі рядки цієї матриці або нульові, або є лінійними комбінаціями інших рядків. Отже, щоб відобразити кінематичні зв'язки, достатньо заповнити матрицю (12), саме враховуючи щойно з'ясовану її особливість.

Вираз, який характеризує кількість кінетичної енергії, — це квадратична форма

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ji} \omega_i \omega_j, \quad b_{ij} = b_{ji}. \quad (13)$$

Тому для повноти опису диференціала необхідно крім матриці (12) задати ще матрицю

$$[b_{ji}] = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (b_{ji} = b_{ij}, i \neq j). \quad (14)$$

Отже будь-яку механічну передачу (або взагалі всю механічну частину трансмісії машини) можна ототожнити із системою узагальнених диференціалів (за умови, що не передбачається плавне регулювання передатних відношень на робочих режимах функціонування машини). Структурні особливості диференціала відображаються у матриці (12) кінематичних параметрів та матриці (14) інерційних параметрів. Опис функціонування узагальненого диференціала зводиться до відтворення матричного рівняння (11) та системи рівнянь (10) або еквівалентного матричного рівняння

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + M_{t1} - M_{tr1} + \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial F_j}{\partial \omega_1} \\ \vdots \\ M_n + M_{tn} - M_{trn} + \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial F_j}{\partial \omega_n} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Основними очевидними перевагами такого відображення є: взаємозумовленість узагальненість і універсальність; одноманітність структурних елементів, яка породжує простоту алгоритму структурного аналізу-синтезу; лаконізм і простота математичного опису.

Вихідними ланками узагальненого диференціала можна вважати навіть рушійні колеса транспортної або підйомно-транспортної машини, які до речі мають гальма так само, як і вихідні ланки керованих диференціалів трансмісії. Тому, спираючись на таку структурну модель, можна розв'язувати будь-які задачі дослідження розгінних режимів руху машини або гальмівних, аналізу показників роботи машини на усталених режимах або взагалі в робочих циклах, оптимізації параметрів двигуна чи трансмісії або ж гальмової системи автомобіля. Тому узагальненість і універсальність справді є взаємозумовленими.

Частина ланок диференціала, наприклад ланки 1, ...,  $r$  (див. рис. 8), можуть бути провідними або веденими, а всі інші ланки  $r+1$ , ...,  $n$  можуть бути з'єднані через фрикціони з ланками подібних диференціалів, утворюючи як завгодно складну структуру. Тому не вдаючись в конструкторські тонкощі, за допомогою однотипних диференціалів можна не тільки легко відображати реальні передачі, але й синтезувати будь-яку уявну трансмісію, що, своєю чергою, дає можливість в задачах оптимізації розглянути абсолютно повну множину можливих розв'язків. А як відомо, задача побудови континууму є однією з найважливіших і майже ніколи за просту не сприймається. Отже структурна одноманітність визначає можливість відносно простого сприймання різноманіття.

Для складання рівнянь динаміки нема потреби аналізувати силову взаємодію окремих деталей реальної передачі. Фіктивні змінні  $v$  спрощують структуру рівнянь динаміки, їх можна вилучити з математичних виразів на будь-якій стадії розв'язування тієї чи іншої задачі, раціонально пристосовуючи модель об'єкту до алгоритму пошуку розв'язку. Лаконізм і простота математичного опису визначають малу трудомісткість процесу синтезу математичної моделі та процесу формалізації оптимізаційних задач.

**Взаємозв'язок між кінематичними та динамічними параметрами.** При доборі передатних відношень в трансмісії машини пересічно інерційні параметри вважають незмінними. Це, звісно, суттєво спрощує методологію оптимізації, та не завжди (особливо в тих випадках, коли передбачається суттєве покращення властивостей трансмісій, а отже і суттєва зміна кінематичних параметрів).



Варіювання передатних відношень в механізмі спричиняє зміну навантажень, що передаються через його деталі. Збільшенню навантажень, природно, необхідно протиставити більшу міцність конструкції, досягнути необхідного рівня якої можна технологічним зміцненням, збільшенням кількості матеріалів, використанням взагалі нових міцніших матеріалів, зміною форм та розмірів навантажуваних деталей. Навпаки, у разі зменшення навантажень, вимоги до властивостей матеріалів повинні бути послаблені, а надлишки матеріалу вилучені. Зміна властивостей та кількості матеріалів, форми та розмірів деталей позначиться на інерційних параметрах конструкції — на значеннях мас та моментів інерції.

Отже кінематичні та інерційні параметри — завжди залежні величини, і якому-небудь вимірнику міцності можна відвести роль інваріанти, яка б визначала кількісний зв'язок між ними: раціонально конструйовані дві передачі, що відрізняються тільки параметрами і ідентичні у всьому іншому, не можуть суттєво відрізнятись за міцністю. Але для побудови такої інваріанти нема сенсу звертатись до існуючих методик розрахунків на міцність, що й досі в значній мірі є емпіричними. Понад те, оскільки будь-яка конструкція опрацьовується остаточно в процесі експлуатації дослідних зразків, то всі поправки, які зазвичай є неминучими, мають чисто евристичний характер, що не піддається математичній формалізації.

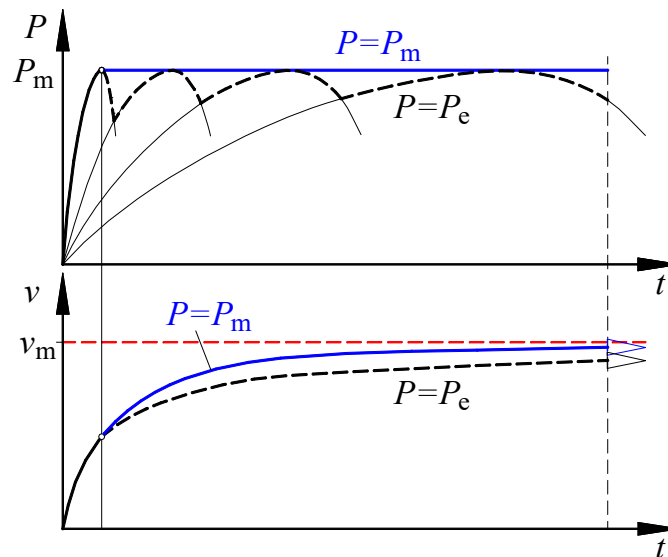
Справедлива теза [23]: де навантаження, там матерія — маса та енергія; всюди, де проявляється маса та енергія, проявляється й навантаження. Маса, як міра кількості речовини сумісно з формою та розмірами простору, який вона заповнює з урахуванням густини розподілу, визначає інерційність. Одночасно ті самі чинники при заданих властивостях речовини визначають і міцність конструкції.

Інерційність характеризує рівень протидії зміні станів системи та здатність накопичувати енергію. Міцність визначає можливості щодо темпу зміни станів системи і кількості накопичуваної енергії. В такому розумінні інерційність і міцність є поняття одного ряду, і в остаточному підсумку, в реальній конструкції вони відображаються взаємовизначально.

Здатність накопичувати енергію є властивістю суто інерційних систем. Будь-який усталений режим роботи можна реалізувати, якщо при заданому рівні дисипації енергії і заданому опорі довкілля джерела енергії здатні передати на перехідних режимах деталям механічної трансмісії певну кількість потенційної та кінетичної енергії. При повній урівноваженості трансмісії накопичуваною буде лише кінетична енергія. Тому гранична кількість накопичуваної кінетичної енергії характеризує загалом енергетичні можливості системи „— двигун — трансмісія — рушій — довкілля —”.

Граничним усталеним є такий режим роботи, який в деяких еталонних умовах принципово досяжний, але за дуже великий, якщо не нескінченний проміжок часу. Приміром, для мобільної машини таким є режим руху зі сталою швидкістю, рівня якої намагається досягнути реальна швидкість переміщення машини в процесі найінтенсивнішого розгону на горизонтальній долівці з якісним покриттям.

У разі наявності безступеневої трансмісії або двигуна зі сталою потужністю на зовнішніх режимах його роботи, характер зміни втілюваної двигуном при повній подачі пального потужності  $P$  і швидкості  $v$  руху машини подано на рис. 9 (програми  $P(t) = P_m$  зміни потужності і швидкості відповідають безступеневій трансмісії чи двигуну зі сталою потужністю, а програми  $P(t) = P_e$  — звичайному двигуну внутрішнього згоряння та сходинчастій (ступеневій) механічній трансмісії). Максимальна потужність  $P = P_m$  та досяжна принципово (суто теоретично) швидкість  $v = v_m$  визначають граничний усталений режим. Цей режим можна також вважати граничним і для машини зі звичайним двигуном внутрішнього згоряння та ступеневою механічною трансмісією (процес руху такої машини на рис. 9 відображено штриховими лініями).



**Рисунок 9** — Абстрактна програма розгону автомобіля

Припустімо, що спроектовано деяку передачу з заданими кінематичними параметрами. Конструктивна реалізація проекту дозволить встановити цілком визначені інерційні параметри її деталей. Якщо експлуатація передачі виявиться ефективною, і при цьому гарантуватиметься необхідний рівень надійності і довговічності, то допустимо, і навіть доцільно, повністю перенести принципи проектування в процес створення нової передачі, в якій передбачено зміни кінематичних параметрів. Це забезпечить у відомій мірі однаковий рівень дисипації енергії в передачах, а в однакових умовах функціонування — рівність робіт на виході. В такому разі енергетичні можливості передачі можна оцінювати за здатністю накопичувати енергію.

Отже можна передбачати, що на граничних режимах порівнювані передачі здатні вміщувати в собі однакову кількість кінетичної енергії. Відтак бажано, щоб на режимах, які відповідають граничним усталеним, однойменні деталі двох порівнюваних передач набували однієї і тієї ж кількості кінетичної енергії ( $T_1 = T_2$ ). Хай завжди неоднаковими будуть інерційні потужності, що пересилаються деталями:

$$P_{in1} = \frac{dT_1}{dt} < \frac{dT_2}{dt} = P_{in2}$$

В такому разі  $T_1 < T_2$ . А це може слугувати підставою для заперечення рівномірності деталей або для заперечення належно раціонального використання властивостей матеріалів та конфігурації деталей.

За дуже грубого припущення про переважання крутних навантажень умова однакової міцності двох однойменних деталей в якому-небудь перерізі  $x-x$  (рис. 10) має вигляд:

$$\frac{M_1}{W_1} = \frac{M_2}{W_2}, \quad W_1 = \frac{I_{x1}}{r_{x1}}, \quad W_2 = \frac{I_{x2}}{r_{x2}}, \quad (16)$$

де  $M$  — крутний (обертовий) момент, що передає деталь;  $W$ ,  $I_x$  — вісний момент опору та полярний момент інерції перерізу  $x-x$ ;  $r_x$  — відстань від осі  $Ox$  до точки  $a$  контрольного перерізу  $x-x$ , у якій дотичні навантаження найбільші.

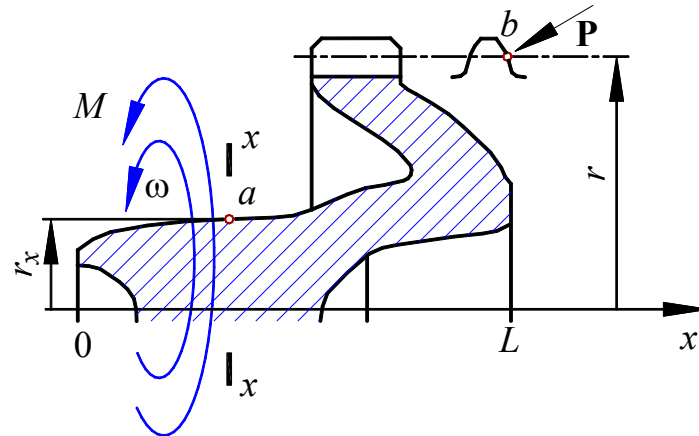


Рисунок 10 — Умовна конфігурація зубчастої деталі передачі

Якщо деталі розраховані на передачу однієї і тієї самої потужності, то

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2. \quad (17)$$

За однакової геометрії зубчатого вінця, за допомогою якого згадані деталі взаємодіють з іншими інцидентними деталями, з умови ідентичності контактних навантажень в зубах випливає, що зусилля в зачепленнях приблизно однакові ( $P_1 \approx P_2$ ). Тому

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2. \quad (18)$$

Перенесімо умовно чинність рівності (18) на всі перерізи деталей і, беручи до уваги (16)—(17), отримаємо умову

$$I_{x1} \omega_1^2 = I_{x2} \omega_2^2. \quad (19)$$

Враховуючи те, що момент інерції при рівномірному розподілі маси в об'ємі деталі визначається за формулою

$$I = m \int_0^L I_x(x) dx,$$

інтегрування виразу (19) дасть рівність  $T_1 = T_2$  (тут  $m$ ,  $L$  — прийняті однаковими для обох деталей маса і довжина).

Вказаний алгоритм співвіднесення інерційних параметрів та параметрів, що визначають міцність деталей, навряд чи можна безпосередньо застосовувати до конкретних конструкцій (примітивні, застосовувані здебільшого як перевірні, розрахунки за допустимими напруженнями кручення навряд чи можуть обумовити конструктивні особливості деталей). Але він підтверджує принципову можливість визначення зв'язку між кінематичними та інерційними параметрами на основі саме наведених міркувань.

Порівняймо усталені режими роботи реальної передачі, всі параметри якої відомі, і спроектованої нової передачі, щодо якої відомі лише кінематичні параметри. Всі змінні та параметри, що відповідають реальній передачі, позначмо індексом „0”.

Оскільки матриці (12) кінематичних параметрів диференціалів обох передач є заздалегідь відомі, то за допомогою рівнянь (9) з виразу (13) можна вилучити  $n-m$  змінних  $\omega_i$  ( $i = n-m+1, \dots, n$ ):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-m} \sum_{j=1}^{n-m} B_{ij} \omega_i \omega_j \quad (i, j = \overline{1, n-m}) \quad (20)$$

( $B_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n-m}$ , — інерційні параметри). Змінні, що залишились у виразі (20), є незалежними. Тому позначивши

$$\frac{\omega_{0k}}{\omega_k} = u_k \quad (k = \overline{1, n-m}), \quad (21)$$

умови рівності накопичуваної однойменними ланками порівнюваних диференціалів кінетичної енергії

$$\frac{1}{2} B_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} B_{0ij} \omega_{0i} \omega_{0j}$$

можна записати у вигляді

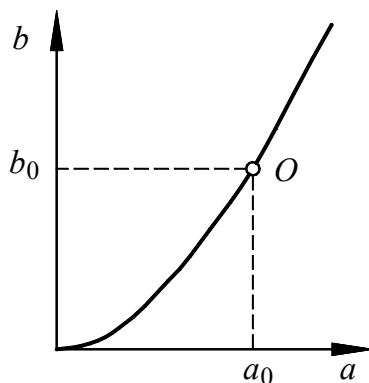
$$B_{ij} = B_{0ij} |u_i| |u_j| \quad (i, j = \overline{1, n-m}). \quad (22)$$

Умови (22) при заданих параметрах (21), що пов'язують номінальні режими роботи порівнюваних диференціалів, дозволяють встановити зв'язок між кінематичними і інерційними параметрами нового диференціала на основі інформації про параметри реального прототипу. Тому з'ясований зв'язок є відносним, а не абсолютним.

Якщо  $n-m$  ланок диференціалів такі, що номінальні усталені режими їх руху не змінюються при варіюванні кінематичних параметрів ( $u_k = 1$  для всіх  $k$ , що є номерами цих ланок), то існують  $n-m$  незмінних інерційних параметрів

$$B_{ij} = B_{0ij}. \quad (23)$$

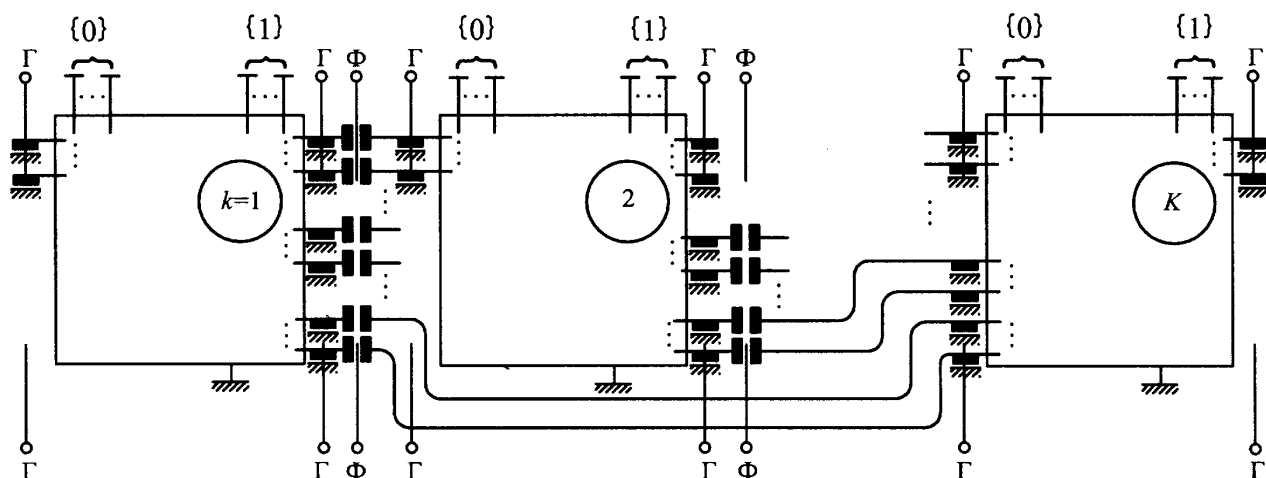
Очевидно, що незмінність параметрів (23) зовсім не означає незмінність параметрів  $b_{ij}$ , які є елементами матриці (13). Насправді залежність вектора інерційних параметрів  $b$  від вектора кінематичних параметрів  $a$  можна вважати квадратичною, що умовно відображено на рис. 11 (певна точка  $O(a_0, b_0)$  відповідає параметрам реального прототипу). Форма (23) запису умов взаємозв'язку між кінематичними та динамічними параметрами найбільш зручна. Тому їй, якщо ще можливо, слід надавати перевагу.



**Рисунок 11** — Умовне відображення зв'язку між векторами динамічних і кінематичних параметрів

**Узагальнена трансмісія.** Механічну частину трансмісії цілком природно тлумачити як систему узагальнених диференціалів. З'єднуючи деяку достатньо велику кількість  $K$  диференціалів через фрикціони  $\Phi$  так, щоб кожний диференціал  $k = 1, 2, \dots, K$  виявився інцидентним зі всіма іншими (рис. 12), можна синтезувати репрезентативну схему трансмісії,

по відношенню до якої будь-яка реальна трансмісія є однією із можливих її конструктивних втілень. Зрозуміло, що при синтезі репрезентативної схеми доводиться ігнорувати деякі обмеження, які обов'язково існують у разі конструктивного синтезу трансмісії. Її можна розгорнути також і просторово.



**Рисунок 12** — Схема трансмісії, синтезованої на основі  $K$  узагальнених диференціалів.

В схемі потрібно розрізняти множини вхідних ланок  $\{0\}$ , вихідних ланок  $\{1\}$ , ланок, керованих тільки гальмами  $\Gamma$ , та ланок, що керуються як гальмами  $\Gamma$ , так і фрикціонами  $\Phi$ . Всі диференціали вважаються створеними відповідним підбором параметрів із  $n$ -ланкового диференціала, що має  $l$  вхідних ланок,  $m$  вихідних ланок,  $p$  ланок керування.

Якщо  $k$ -й диференціал має  $L^k$  вхідних ланок,  $M^k$  вихідних ланок,  $P^k$  ланок керування,  $W^k = L^k + M^k + P^k - N^k$  — ступенів вільності, то матрицю (12) кінематичних параметрів необхідно записати у вигляді

$$[a^k] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{011}^k & \cdots & a_{01L^k}^k & 0 & \cdots & 0 & a_{111}^k & \cdots & a_{11M^k}^k & 0 & \cdots & 0 & a_{11}^k & \cdots & a_{1P^k}^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0N^k1}^k & \cdots & a_{0N^kL^k}^k & 0 & \cdots & 0 & a_{1N^k1}^k & \cdots & a_{1N^kM^k}^k & 0 & \cdots & 0 & a_{N^k1}^k & \cdots & a_{N^kP^k}^k & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right], \quad (24)$$

$$\left[ \begin{array}{c} x^k \end{array} \right]_{(n-N^k) \times n}$$

де  $N^k \leq n$ ;  $L^k \leq l$ ;  $M^k \leq m$ ;  $P^k \leq p$ ;  $l + m + p = n$ ;  $\{0ij\}$ ,  $\{1ij\}$  — множина триіндексних позначень, в яких перші індекси („0”, „1”) позначають параметри, відповідні вхідним та вихідним ланкам;  $[x^k]$  — матриця, рядки якої можуть бути нульовими, або лінійними комбінаціями перших  $N^k$  рядків матриці  $[a^k]$ ;  $((n - N^k) \times n)$ ,  $(n \times m)$  — розміри матриць  $[x^k]$ ,  $[a^k]$ ;  $k = \overline{1, K}$  — номер диференціала.

Використовуючи матриці (24), прямим сумуванням блочну діагональну (квазідіагональну) матрицю

$$[a] = [a^1] \oplus [a^2] \oplus \dots \oplus [a^K] = \begin{bmatrix} [a^1] & & 0 \\ & [a^2] & \\ & & \ddots \\ 0 & & & [a^K] \end{bmatrix}_{(K \times K)}, \quad (25)$$

і рівняння

$$[a][\omega] = [0], \quad (26)$$

де  $[0]$  — нульовий вектор-стовпчик;

$$[\omega] = [\omega_{01}^1 \dots \omega_{0L^1}^1 \dots \omega_{0l}^1 \omega_{11}^1 \dots \omega_{1M^1}^1 \dots \omega_m^1 \omega_1^1 \dots \omega_{p^1}^1 \dots \omega_p^1 \dots \omega_{01}^k \dots \omega_{0L^k}^k \dots \omega_{0l}^k \omega_{11}^k \dots \omega_{1M^k}^k \dots \omega_{1m}^k \omega_1^k \dots \omega_{p^k}^k \dots \omega_p^k \dots \omega_{01}^K \dots \omega_{0L^K}^K \dots \omega_{0l}^K \omega_{11}^K \dots \omega_{1M^K}^K \dots \omega_{1m}^K \omega_1^K \dots \omega_{p^K}^K \dots \omega_p^K]^T; \quad (27)$$

Т — знак транспонування, який вказує, що  $[\omega]$  є вектор-стовпець, хоча він записаний як вектор-рядок;  $\omega_{0(L^k+1)}^k, \dots, \omega_{0l}^k, \omega_{1(M^k+1)}^k, \dots, \omega_{1m}^k, \omega_{(p^k+1)}^k, \dots, \omega_p^k$  ( $k = \overline{1, K}$ ) — фіктивні змінні (кутові швидкості ланок, яких в дійсності не існує).

Матриця (25) є матрицею кінематичних параметрів узагальненої трансмісії, а матричне рівняння (26) описує сталі кінематичні зв'язки, які існують в цій трансмісії. Таким чином, в математичному описі кінематичних зв'язків, що існують в узагальненій трансмісії, спостерігається аналогія з описом зв'язків, які існують в узагальненому диференціалі.

Без труднощів можна поширити таку аналогію також і на узагальнені схеми трансмісії та диференціала. Оскільки кінематична структура трансмісії, зокрема цілісна відокремленість її складових частин — диференціалів, відображена в математичних конструкціях (25)—(26), то по-елементну схему (рис. 12) без втрати інформації про структуру можна замінити схемою, відображеною на рис. 13 ( $\{\Gamma\}, \{\Phi\}$  — множини всіх гальм та всіх ланок фрикціонів;  $L = \sum_{k=1}^K L^k$ ,  $M = \sum_{k=1}^K M^k$ ). За цією схемою трансмісія — це диференціал, в якому всі ланки фрикціонів попарно інцидентні одна з одною (на відміну від диференціала, зображеного на рис. 8, у якому ланки фрикціонів інцидентні з аналогічними ланками інших диференціалів).

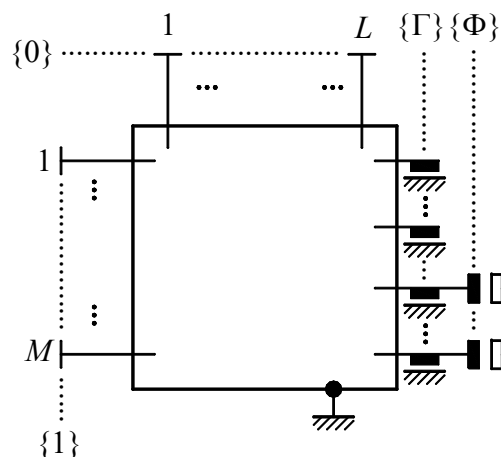


Рисунок 13 — Схема узагальненої трансмісії

Введімо позначення

$$\begin{aligned}
[a_0^k] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} a_{011}^k & \cdots & a_{01L^k}^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0N^k1}^k & \cdots & a_{0N^kL^k}^k & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]_{(N^k \times l)} ; \quad [a_1^k] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} a_{111}^k & \cdots & a_{11M^k}^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N^k1}^k & \cdots & a_{1N^kM^k}^k & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]_{(N^k \times m)} ; \\
[a_n^k] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} a_{n12}^k & \cdots & a_{n1P^k}^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nN^k1}^k & \cdots & a_{nN^kP^k}^k & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]_{(N^k \times P)} , \quad k = \overline{1, K} , \quad (28)
\end{aligned}$$

і зобразимо матрицю (24) у вигляді:

$$[a^k] = \left[ \begin{array}{c|ccc} [a_0^k] & [a_1^k] & \cdots & [a_n^k] \\ \hline & & & \end{array} \right] \cdot [X^k] .$$

Перегруповуючи блоки, матрицю (25) перетворимо в матрицю

$$[a^\tau] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} [a_0^1] & & 0 & [a_1^1] & & 0 & [a_n^1] & & 0 \\ & [a_0^2] & & & [a_1^2] & & & [a_n^2] & \\ & & \ddots & & & \ddots & & & \\ 0 & & [a_0^k] & 0 & & [a_1^k] & 0 & & [a_n^k] \\ \hline & & 0 & & & & & & [\Pi_i^\tau] \end{array} \right] , \quad (29)$$

де  $[\Pi_i^\tau]$  — матриця, яка вказує, що в трансмісії ввімкнута  $i$ -а передача.

У процесі перетворення матриці (25) внесімо зміни, що дозволяють вилучити всі можливі нульові стовпчики. В подальшому під матрицями  $[a_0^k]$ ,  $[a_1^k]$ , ...,  $[a_n^k]$  в (29) будемо розуміти матриці (28) зменшених розмірів  $(N^k \times L^k)$ ,  $(N^k \times M^k)$ ,  $(N^k \times P^k)$  за рахунок ліквідації нульових стовпчиків.

Поставмо матриці (29) у відповідність вектор-стовпчик

$$\begin{aligned}
[\omega] &= \left[ [\omega_0^1] \cdots [\omega_0^k] \cdots [\omega_0^K] \quad [\omega_1^1] \cdots [\omega_1^k] \cdots [\omega_1^K] \quad [\omega_n^1] \cdots [\omega_n^k] \cdots [\omega_n^K] \right]^\tau ; \\
[\omega_0^k] &= [\omega_{01}^k \cdots \omega_{0L^k}^k]^\tau , \quad [\omega_1^k] = [\omega_{11}^k \cdots \omega_{1M^k}^k]^\tau , \quad [\omega_n^k] = [\omega_{n1}^k \cdots \omega_{nP^k}^k]^\tau \quad (k = \overline{1, K}) , \quad (30)
\end{aligned}$$

який отримуємо з вектор-стовпчика (27) зміною розташування реальних та ліквідацією фіктивних змінних  $\omega$ . Тоді рівнянню (26) можна буде поставити у відповідність рівняння

$$[a_i^\tau][\omega] = [0] . \quad (31)$$

Система виразів (29)—(31) з точністю до матриці  $[\Pi_i^\tau]$  еквівалентна системі виразів (25)—(27). Елементами матриці

$$[\Pi_i^\tau] = \left[ \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{W1} & \cdots & \alpha_{WS} \end{array} \right]_{(W \times P)} , \quad W = \sum_{k=1}^K (L^k + M^k + P^k - N^k) = \sum_{k=1}^K W^k , \quad P = \sum_{k=1}^K P^k , \quad (32)$$

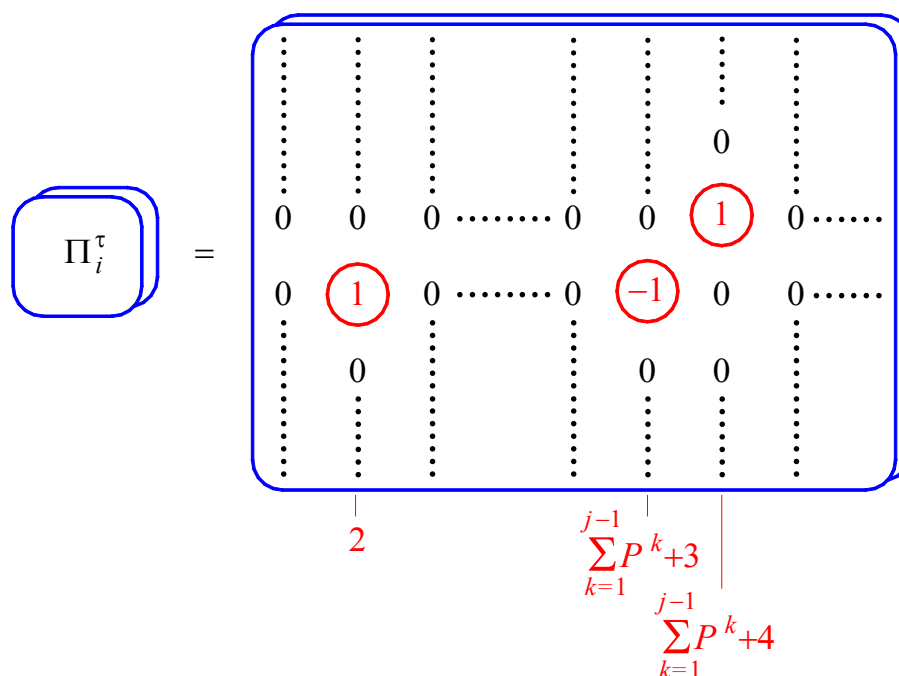
є тільки числа  $\alpha = -1, 0, 1$ ; причому в кожному рядку можуть знаходитись не більш як одне число  $\alpha = -1$  і не більш як одне число  $\alpha = 1$ .

Хай наприклад, при вмиканні  $i$ -го ступеня обов'язково вмикається четверте гальмо  $j$ -го диференціала та фрикціон, що з'єднує другу ланку керування першого диференціала з третьою такою самою ланкою  $j$ -го диференціала. Матриця (32) відобразить цей факт в тому

разі, якщо на перетині деякого її рядка з  $\left(\sum_{k=1}^{j-1} P^k + 4\right)$ -м стовпчиком буде знаходитись число

$\alpha = 1$  (чи  $\alpha = -1$ ), а на перетинах деякого іншого рядка з другим та  $\left(\sum_{k=1}^{j-1} P^k + 3\right)$ -м стовпчи-

ками будуть знаходитись числа  $\alpha_1 = -1$ ;  $\alpha_2 = -1$  (чи  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = 1$ ; всі інші елементи вказаних рядків і стовпчиків є нулі, рис. 14). В цьому разі рівняння (31) справді вкаже на сподівані співвідношення  $\omega_4 = 0$  та  $\omega_2^1 = \omega_3^j$ , що повинні підтримуватись після вмикання  $i$ -го ступеня.



**Рисунок 14** — Особливість матриці, яка є визначником увімкнутого ступеня (увімкнутої передачі)

Матриць  $[\Pi_i^\tau]$  існує стільки, скільки ступенів можна реалізувати в трансмісії при заданій множині гальм та фрикціонів і при заданій кількості використовуваних ступенів вільності. Для формалізації процесу укладання матриць  $[\Pi_i^\tau]$  введемо спеціальні матриці інцидентності, використовуючи такий алгоритм.

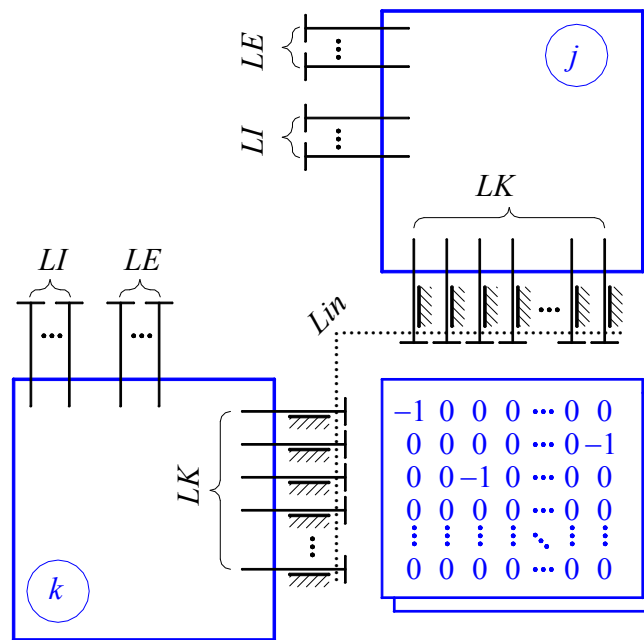
Дві ланки різних диференціалів, які утворюють фрикціон, назвемо негативно інцидентними. Будемо також вважати, що будь-яка ланка керування в диференціалі позитивно інцидентна сама собі. Не важливо, в якому випадку приписувати позитивну чи негативну інцидентність. Важливо тільки те, що самоінцидентність обернена інцидентності. Наприклад, інцидентність ланки самій собі можна вважати негативною, а інцидентність різних ланок — позитивною.



За схемою, наведеною на рис. 15, негативну інцидентність ланок довільних  $k$ -го та  $j$ -го диференціалів позначимо числом  $\alpha = -1$ , а відсутність інцидентності — числом  $\alpha = 0$ . В результаті буде побудована матриця  $[H_{kj}]$  інцидентності ланок довільних  $k$ -го та  $j$ -го диференціалів, елементами якої будуть тільки числа  $-1$  та  $0$ . За цією схемою можна побудувати й матрицю інцидентності (позитивної) ланок  $k$ -го диференціала самим собі

$$[H_{kk}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

яка завжди є одиничною.



**Рисунок 15** — Схема побудови матриці інцидентності:  
 $LI$ ,  $LE$ ,  $LK$ ,  $Lin$  — ланки входні, вихідні, керування, інцидентні попарно

За допомогою матриць  $[H_{kj}]$  ( $k, j = \overline{1, K}$ ) побудуємо загальну матрицю інцидентності

$$[H^\tau] = \begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & \dots & [H_{1K}] \\ & [H_{22}] & \dots & [H_{2K}] \\ \mathbf{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & [H_{KK}] \end{bmatrix}, \quad (33)$$

розміри якої при усуненні меж блоків —  $P \times P$ .

Кожна матриця  $[\Pi_i^\tau]$  складається з рядків, які належать матриці (33). Тому послідовний вибір різноманітних комбінацій рядків з матриці (33) дозволяє побудувати всю множину шуканих матриць  $[\Pi_i^\tau]$ . Деякі рядки можуть повторюватись декілька разів так, щоб трансляція мала задану кількість ступенів вільності; рядки, які зустрічаються другий і більше разів, можна замінити нульовими.

Величина  $W$  (див. (32)) визначає кількість ступенів вільності в трансмісії при повністю розімкнутих фрикціонах і гальмах. У разі спрацювання одного фрикціона чи одного гальма кількість ступенів вільності зменшується на одиницю. В загальному випадку, за наявності багатьох входів і виходів, кількість  $W_n$  фактично використовуваних (тобто реалізованих при вмиканні того чи іншого ступеня) ступенів вільності може бути різною, але меншою за кількість входів і виходів ( $W_n < L + M$ ).

Для забезпечення заданої кількості  $W_n$  використовуваних ступенів вільності достатньо, щоб у матриці  $[\Pi_i^r]$  було  $V = W - W_n$  рядків матриці (33) без повторень.

Загальна кількість різних матриць  $[\Pi_i^r]$  буде дорівнювати кількості комбінацій з  $P$  по  $r$ :

$$K_{\Pi} = C_P^r = \frac{P(P-1)\cdots(P-r+1)}{r!} = \frac{P!}{r!(P-r)!}. \quad (34)$$

Отже, величина  $K_{\Pi} = K_{\Pi}(P, r)$  визначає максимальну кількість передач, можливу в трансмісії при повному використанні всієї множини гальм і фрикціонів та при використанні  $W_n = W_n(W, r)$  ступенів вільності.

Часто [3, 12] від використання всіх елементів керування відмовляються, обґрунтовуючи це тим, що, по-перше, всі передатні відношення в трансмісії виявляються взаємозв'язаними так, що не відповідають наперед вибраному ряду, і, по-друге, що введення зайвих (таких, які не використовуються в повній мірі) фрикціонів дозволяє спростити конструкцію узагальнених диференціалів за рахунок зменшення, наприклад, кількості планетарних механізмів. В цих випадках фактична кількість передач завжди менша за величину  $K_{\Pi}$ , обчислювану за формулою (34).

**Основні різновидності механічної трансмісії.** З одного боку, диференціали є елементами, з яких можна синтезувати будь-яку мислиму трансмісію і на які можна розчленувати будь-яку реальну трансмісію в процесі аналізу її будови і властивостей. З другого боку, будь-який диференціал можна трактувати як частковий випадок трансмісії. Отже, при співвіднесенні диференціала і трансмісії, так чи інакше, простежуються два аспекти проблеми аналізу-синтезу трансмісії — аспект „частина — ціле” та аспект „часткове (окреме) — загальне”. Але, чи завжди у всіх деципах ці аспекти можна чітко розрізнити?.. Зокрема, виникає питання: чи можливо трансмісію з заданим рядом передатних відношень замінити на диференціал з таким самим рядом?

Диференціал і трансмісію можна вважати кінематично еквівалентними в тому разі, коли кількість вони мають однакові кількості і вхідних, і вихідних ланок, а сукупність елементів керування дозволяє реалізувати однакову кількість передач з однаковими передатними відношеннями, і якщо на довільному режимі роботи трансмісії і диференціала швидкості обертання відповідних їй вхідних і вихідних ланок збігаються.

Поставмо кожній вхідній і кожній вихідній ланкам трансмісії у відповідність по одній аналогічній ланці диференціала, та змінимо позначення так, щоб матрицю (12) звести до матриці

$$[a_i^d] = \begin{bmatrix} [a_{0ij}^1] [a_{0ij}^2] \cdots [a_{0ij}^K] [a_{1ij}^1] [a_{1ij}^2] \cdots [a_{1ij}^K] [a_{uij}] \\ [0] \vdots [\Pi_i^d] \end{bmatrix}, \quad (35)$$

де

$$\begin{bmatrix} a_{0ij}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{011}^{kd} & \cdots & a_{01L^k}^{kd} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0N1}^{kd} & \cdots & a_{0NL^k}^{kd} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1ij}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{111}^{kd} & \cdots & a_{11M^k}^{kd} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N1}^{kd} & \cdots & a_{1NM^k}^{kd} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{uij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{u11} & \cdots & a_{u1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{uN1} & \cdots & a_{uNP} \end{bmatrix}, N = \sum_{k=1}^K N^k, P = \sum_{k=1}^K P^k.$$

Матриця  $[\Pi_i^d]$  будується за тими самими правилами, що й матриця  $[\Pi_i^r]$ , але з залученням одиничної матриці інцидентності

$$[H^d] = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}_{(P \times P)}. \quad (36)$$

Для диференціала і трансмісії, що протиставляються тут, значення параметрів  $P$  та  $r$  беруться однаковими, що гарантує одночасно однакову кількість передач і однакову кількість використовуваних на кожній з відповідних передач ступенів вільності в диференціалі та трансмісії.

Максимально можлива кількість ступенів (див. (34)) визначається величиною біноміального коефіцієнта  $C_P^r$ . Серед всіх цих коефіцієнтів можна знайти множину однакових:

$$C_P^r = C_P^{P-r}. \quad (37)$$

З формули (37), отже, випливає, що одну й ту саму кількість  $K_\Pi$  передач можна забезпечити при деякому одному значенні  $P$  і двох значеннях параметра  $r$  ( $r_1 = r$ ,  $r_2 = P - r$ ). Ця обставина наочно ілюструється за допомогою так званого трикутника Паскаля, рис. 16.

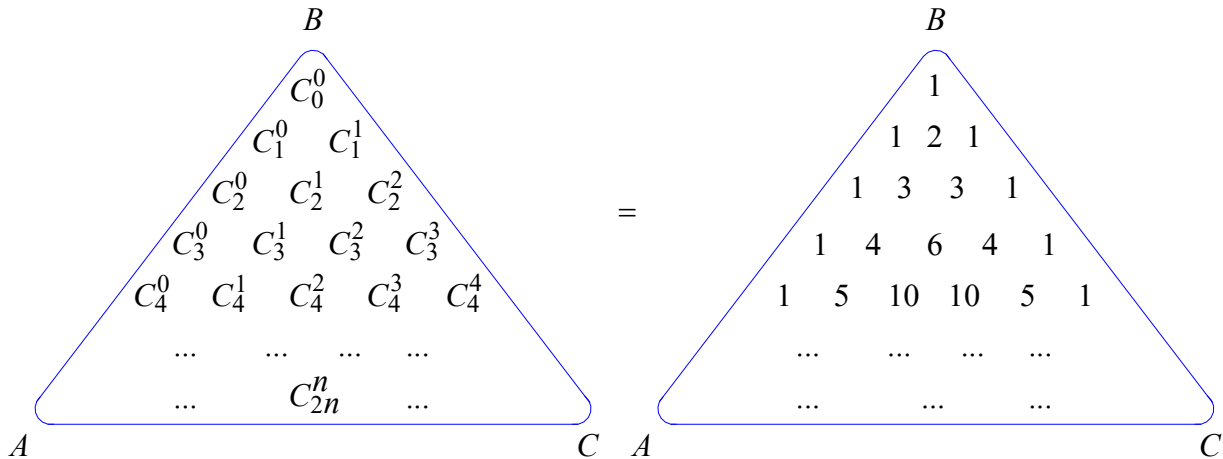


Рисунок 16 — Символічний трикутник Паскаля

Елементи трикутника Паскаля розташовані симетрично відносно бісектриси кута  $\angle ABC$  так, що  $C_P^r = C_P^{P-r}$ . Кожний елемент трикутника, окрім тих, що лежать вздовж сторін  $AB$  та  $BC$ , є сумою двох розташованих над ним елементів, через що жоден з розташованих

нижче елементів  $C_p^r \neq 1$  не може відтворити того, що розташований вище. Рівність (37) безпосередньо перевіряється з допомогою формули (34).

Отже трансмісії можна протиставити також і диференціал, в якому при перемиканні ступенів замість  $r$  елементів керування спрацьовує  $P-r$  елементів.

З викладеного випливає, що еквівалентними вважаються диференціал і трансмісія, яким відповідають матриці (36) і (33) однакових розмірів та з однаковим рангом. Однаковий ранг мають також всі ідентично розташовані, виділені штриховими лініями, підматриці матриць (35) і (29).

Для остаточного визначення умов еквівалентності залишається тільки визначити співвідношення між кінематичними параметрами диференціала та трансмісії. Але тут обмежмося змалюванням тільки суті знаходження умов еквівалентності кінематичних параметрів з огляду на те, що питання еквівалентності диференціала і трансмісії набуває важливого самостійного значення.

Звернімось знову до матриці (35). Блоки  $[a_{uij}]$  відповідають вектору кутових швидкостей ланок керування диференціала, який записується у вигляді

$$[\omega_u] = [\omega_{u1}, \omega_{u2}, \dots, \omega_{up}]^T.$$

Вектори ж кутових швидкостей груп вхідних та вихідних ланок диференціала, на що вже вказувалось, повинні дорівнювати відповідним векторам  $[\omega_0^k], [\omega_1^k]$  ( $k = \overline{1, k}$ ) кутових швидкостей аналогічних груп ланок трансмісії (див. (30)).

Дві довільні системи рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^1 x_j + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}^1 y_j &= \gamma_i^1, \quad i = \overline{1, m+n}; \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 x_j + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}^2 z_j &= \gamma_i^2, \quad i = \overline{1, m+n}, \end{aligned}$$

кожна з яких сама по собі є сумісна й визначена (тобто така, що має один-єдиний розв'язок), разом утворюють сумісну й визначену систему  $2(m+n)$  рівнянь тоді, коли справджуються рівності

$$\Delta_i^1 \Delta^2 = \Delta_i^2 \Delta^1, \quad i = \overline{1, n},$$

де,  $\Delta^1 (\Delta^2)$  — визначник матриці коефіцієнтів при змінних  $x, y$  ( $x, z$ ) першої (другої) системи рівнянь;  $\Delta_i^1 (\Delta_i^2)$  — визначник, який отримуємо заміною в визначнику  $\Delta^1 (\Delta^2)$   $i$ -го його стовпчика стовпчиком вільних членів  $\gamma^1 (\gamma^2)$ .

Вважатимемо, що змінні величини  $\omega_{01}^k, \dots, \omega_{0l^k}^k, \dots, \omega_{11}^k, \dots, \omega_{1m^k}^k$  ( $k = \overline{1, K}$ ) незалежні, і перенесемо всі члени рівняння (31), в яких фігурують ці змінні, в праву частину. Легко пересвідчитись, що матрицю коефіцієнтів отриманого рівняння буде матриця (29), з якої викреслені всі стовпчики, що відповідають незалежним змінним. А отже вільними членами будуть величини

$$\gamma_{ki}^\tau = -\sum_{l=1}^{l^k} a_{0il}^k \omega_{0l}^k - \sum_{m=1}^{m^k} a_{1im}^k \omega_{1m}^k \quad (i = \overline{1, N^k}; k = \overline{1, K}); \quad \gamma_{ki}^\tau = 0, \quad k > K.$$

Власне на викладене спирається ідея побудови умов еквівалентності диференціала й трансмісії.

**Висновки.** Наведені теоретичні міркування розкривають можливість застосування в середовищі автоматизованого проектування дуже зручних засобів повноцінного відображення структур механічних частин трансмісії мобільних машин, яким притаманний, мабуть, найвищий рівень математичної формалізації. Узагальнене відображення структур трансмісій в середовищі автоматизованого проектування розкриває можливість у процесі оптимізації конструкцій машин будувати найрізноманітніші варіації структур, а не обмежуватись лише варіюванням параметрів трансмісії в рамках певної структури з вимушеним наступним аналізом окремо усіх привабливих структур.

В рамках запропонованого алгоритму формалізації структури трансмісії мобільної машини абстрактний гіперболоїдний планетарний механізм править за узагальнений структурний елемент, який зміною конструктивних параметрів можна звести до будь-якого звичного диференціала, приміром, з двома ступенями вільності (скажімо, конічного чи циліндричного — плаского чи просторового). Узагальнений багатоланковий диференціал — це структурна одиниця, яка покликана формально відображати будь-яку незмінювану частину трансмісії мобільної машини якої завгодно складності і якої завгодно будови. З одного боку, цей узагальнений диференціал можна трактувати як систему симплекс-диференціалів (приміром, триланкових планетарних), а з другого, — як дуже загальну структуру, яка, навпаки, може мати найрізноманітніші примітивні втілення і, зокрема, зводиться до симплекс-диференціала. Узагальнену трансмісію зручно тлумачити як набір узагальнених диференціалів, поєднаних в систему за допомогою елементів керування (зчіпників, гальм, фрикціонів, зубчастих муфт, муфт вільного бігу (ходу, обгінних), синхронізаторів). В такому разі перемикання передач — це вмотивована зміна внутрішньої структури трансмісії за допомогою згаданих елементів керування. Обставини, за яких має змінюватись внутрішня структура — це також предмет оптимізаційного дослідження, це пошук оптимальних так званих законів перемикання передач.

Викладене — це, разом з тим, непряма відповідь на запитання «Конструювати чи комбінувати?». Звісно — конструювати! Бо рухатись від загального до конкретного не можна абияк, доведеться вимушено керуватись якимись критеріями досконалості. Та й відповідь на запитання «Оптимальне чи оригінальне?» — цілком однозначна. В середовищі автоматизованого проектування зажди йтиметься про оптимальне. Але великим, звісно, успіхом буде, коли оте оптимальне виявиться ще й оригінальним (невідомим досі, несподіваним).

#### Список літератури:

1. Шац Я. Ю., Слоневский Р. В., Шох Е. С. Проектирование оптимальных соосных передач на ЕЦВМ. — Москва: Машиностроение, 1965. — 248 с.
2. Jaśkiewicz Z., Wąsiewski A. Przekładnie walcowe. Projektowanie — Warszawa: WKŁ, 1995. — 534 с.
3. Иванченко П. Н., Сушков Ю. А., Вашец А. Д. Автоматизация выбора схем планетарных коробок передач. Справочное пособие. — Ленинград: Машиностроение, 1974. — 234 с.
4. Кирдяшев Ю. Н. Многопоточные передачи дифференциального типа. — Ленинград: Машиностроение, 1981. — 224 с.
5. Планетарные передачи. Справочник / Под ред. В. Н. Кудрявцева и Ю. Н. Кирдяшева. — Ленинград: Машиностроение, 1977. — 535 с.
6. Красненьков В. И., Вашец А. Д. Проектирование планетарных механизмов транспортных машин. — Москва: Машиностроение. 1986. — 272 с.
7. Волков Д. П., Крайнев А. Ф. Трансмиссии строительных и дорожных машин. Справочное пособие. — Москва: Машиностроение, 1974. — 424 с.
8. Ott A., Wiggenhauser P. Simulation der Schaltung von Gruppengetrieben mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen. — ATZ 74 (1972), Nr 9, S. 343–348; Nr11, S. 453–455.
9. Гащук П. Н. Синтез обобщенной трансмиссии транспортной машины // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Технология машиностроения и динамическая прочность машин. — Львов: Вища шк. Изд-во при Львов. ун-те, 1983. — № 170. — С. 22–24.

10. Гащук П. Н. Формалізація відображення структур трансмісій автомобілів // Тематичний збірник: Питання динаміки та синтезу ГМП. Вип. 2. Львів. політехн. ін-т. Львів, 1985, — С. 41—74.— Деп. в УкрНДІНТІ, № 2801/85.
11. Дружинский И. А. Механические цепи.— Ленинград: Машиностроение, 1977.— 240 с.
12. Сушков Ю.А. Графы зубчатых механизмов. — Ленинград: Машиностроение, 1983. — 215 с.
13. Крейнс М. А., Розовский М. С. Зубчатые механизмы. — Москва: Наука. 1972. — 427 с.
14. Кристи М. К., Красеньков В. И. Новые механизмы трансмиссий.— Москва: Машиностроение, 1967.— 216 с.
15. Шабанов К. Д. Замкнутые дифференциальные передачи.— Москва: Машиностроение, 1972.— 160 с.
16. Гащук П. М, Нікіпчук С. В. Методологія структурної ідентифікації рядів передатних відношень в трансмісіях автомобільних машин / Пожежна та техногенна безпека. Теорія, практика, інновації: Матеріали міжнародної науково-практичної конференції. — Львів, 20, 21 жовтня 2016. — С. 411 — 414.
17. Парс Л. А. Аналитическая динамика/ Перев. с англ.— М.: Наука, 1971.— 636 с.
18. Гащук П. М., Войтків С. В. Способи створення уніфікованих автобусів різного призначення // Вісник Львів. держ. ун-ту безпеки життєдіяльності, 2014.— № 9.— С. 41 — 52.
19. Гащук П. М., Войтків С. В., Курач Б. В. Ідентифікація поколінь автобусів за уніфікаційним критерієм // Вісник Львів. держ. ун-ту безпеки життєдіяльності, 2014.— № 10.— С. 32 — 55.
20. Гащук П. М., Войтків С. В., Курач Б. В. Використання поняття інтегрального модуля для формування типових проектів автобусної техніки // Вісник Львів. держ. ун-ту безпеки життєдіяльності, 2014.— № 10.— С. 56 — 75.
21. Гащук П. М, Войтків С. В. Концепція створення типорозмірного ряду модульно-уніфікованих спеціальних колісних шасі для пожежно-рятувальних автомобілів / Пожежна та техногенна безпека. Теорія, практика, інновації: Матеріали міжнародної науково-практичної конференції. — Львів, 20, 21 жовтня 2016. — С. 414 — 417.
22. Клиот-Дашинский М. И. Алгебра матриц и векторов.— Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974.— 160 с.
23. Дитрих Я. Проектирование и конструирование. Системный подход/ Перев. с польск.— Москва: Мир, 1981.— 456 с.

#### References:

1. Shats, Ya. Yu., Slonevsky, R. V., Shokh, Ye. S. (1965). *Designing of optimal co-axial transmissions on electronic digital computers*. Moscow: Mechanical engineering (in Russ.)
2. Jaśkiewicz, Z., & Wąnsiewski, A. (1995). *Przekładnie walcowe. Projektowanie*. Warszawa: WKŁ (in Pol.)
3. Ivanchenko, P. N., Sushkov, Yu. A., Vashts, A. D. (1974). *Automation of the choice of planetary gearboxes*. Leningrad: Mechanical engineering (in Russ.)
4. Kirdyashev, Yu. N. (1981). *Multithreaded differential type transmissions*. Leningrad: Mechanical engineering (in Russ.)
5. Kudryavtsev, V. N., & Kirdyashev, N. N. (1977). *Planetary gears*. Leningrad: Mechanical engineering (in Russ.)
6. Krasnenkov, V. I., & Vashts, A. D. (1986). *Designing of planetary mechanisms of transport vehicles*. Moscow: Mechanical engineering (in Russ.)
7. Volkov, D. P., & Krainev, A. F. (1974). *The transmissions of construction and road machinery*. Moscow: Mechanical engineering (in Russ.)
8. Ott, A., & Wiggenhauser, P. (1972) *Simulation der Schaltung von Gruppengetrieben mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen*. ATZ 74, Nr 9, S. 343–348; Nr11, 453–455 (in D.)

9. Hashchuk, P. M. (1983). Synthesis of the generalized transmission of a transport vehicle. *L'viv: Vishcha shk. Publishing house at L'viv University: Technology of mechanical engineering and dynamic strength of machines*, 170, 22—24 (in Russ.)
10. Hashchuk, P. M. (1985). Formalization of the structures of transmissions of motor vehicles. *Lviv: Polytechnic institute. Special collection: Questions dynamics and synthesis hydromechanical transmission*, 2, 41—74 (in Ukr.)
11. Druzhinsky, I. A. (1977). *Mechanical chains*. Leningrad: Mechanical engineering (in Russ.)
12. Sushkov, Yu. A. (1983). *Counts of gears*. Leningrad: Mechanical engineering (in Russ.)
13. Kreines, M. A., & Rozovski, M. S. (1972). *Gear mechanisms*. Moscow: Science (in Russ.)
14. Kristi, M. K., & Krasnenkov, V. I. (1967). *New transmission mechanisms*. Moscow: Mechanical engineering (in Russ.)
15. Shabanov, K. D. (1972). *Closed differential transmissions*. Moscow: Mechanical engineering (in Russ.)
16. Hashchuk, P. M., & Nikipchuk, S. V. (2016). The methodology of structural identification series of transfer relations in transmissions of motor vehicles. *L'viv: Materials of the International Scientific Conference "Fire and Technical Safety. Theory, practice and innovation"*, 411—414. (in Ukr.)
17. Pars, L. A. (1971). *Analytical dynamics*. Moscow: Science. (in Russ.)
18. Hashchuk P. M., & Vojtkiv S. V. (2014). Ways of creating unified buses of different assignment. *Bulletin of the Lviv State University of Life Safety*, no. 9, pp. 41—52 (in Ukr.)
19. Hashchuk, P. M., Vojtkiv, S. V., & Kurach, B. V. (2014). Identification of buses generations by the unification criterion. *Bulletin of the Lviv State University of Life Safety*, no. 10, pp. 32—55 (in Ukr.)
20. Hashchuk P. M., Vojtkiv S. V., & Kurach B. V. (2014). Use of the concept of integral module for the formation of the type range projects of buses. *Bulletin of the Lviv State University of Life Safety*, no. 10, pp. 56—75 (in Ukr.)
21. Hashchuk P. M., & Vojtkiv S. V. (2016). Creation conception of type-size row of the module-compatible special wheeled undercarriages for fire-rescues cars. *L'viv: Materials of the International Scientific Conference "Fire and Technical Safety. Theory, practice and innovation"*, 414—417. (in Ukr.)
22. Kliot-Dashinsky, M. I. (1974). *The algebra of matrices and vectors*. Leningrad: Leningrad University Press (in Russ.)
23. Ditrikh, Ya. (1981). *Design and construction. Systems approach*. Moscow: Mir (World) (in Russ.)

